Docente: Vincenzo Pappalardo
Materia: Matematica

Disequazioni grado superiore al secondo

Algebra

* PROCEDURA RISOLUTIVA

1. Scompongo il polinomio P(x) in fattori di primo e di secondo grado
2. Pongo ogni fattore maggiore di zero
3. Studio il segno dei singoli fattori
4. Rappresento in un unico grafico il segno di tutti i fattori
5. Individuo, mediante la regola dei segni del prodotto, gli intervalli in cui P(x) assume il segno, negativo o positivo, richiesto.

ESERCIZI

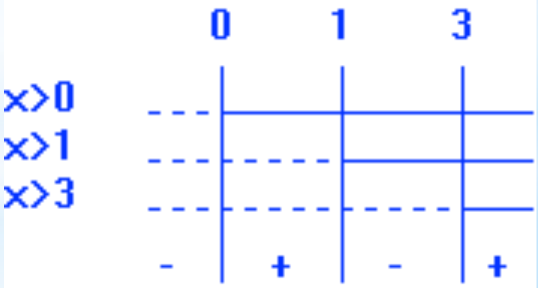
Risolvere la seguente disequazione: $x^3-4x^2+3x>0$

1. Scompongo il polinomio in fattori: $x(x-3)(x-1)>0$

2. Studio il segno dei fattori ponendoli maggiore di zero:

$$x>0$$
$$x-3>0 \quad \text{per } x>3$$
$$x-1>0 \quad \text{per } x>1$$

3. Rappresento in un unico grafico il segno di tutti i fattori:



4. La soluzione della disequazione è data dagli intervalli in cui il prodotto è positivo:

$$0<x<1 \text{ e } x>3$$

Risolvere la seguente disequazione: $x^4-5x^3+5x^2+5x-6>0$

Il polinomio associato si annulla per $x=1$:

$$P(1) = 1-5+5+5-6 = 0$$

Applico la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ 1 & & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

Quindi ottengo:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x^3- 4x^2 + x + 6)$$

Continuo a scomporre applicando di nuovo la regola di Ruffini:

$$P(-1)= -1-4-1-6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

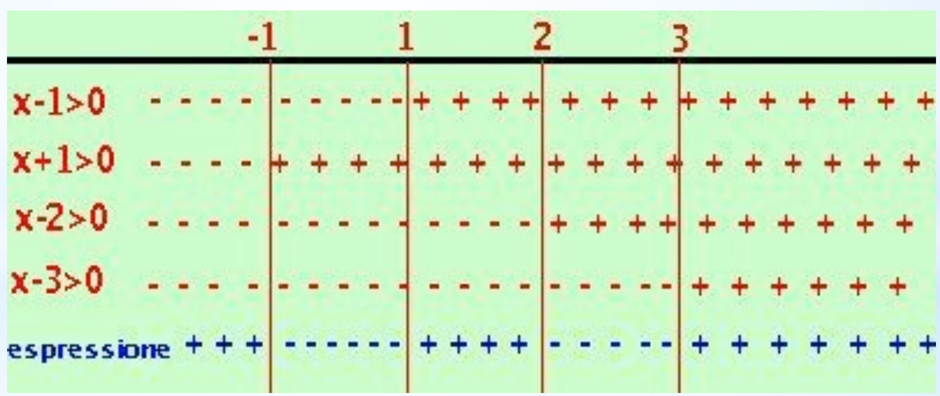
Quindi ottengo:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 =$$
$$(x-1)(x^3 - 4x^2 + x + 6) =$$
$$(x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$$

Infine, scomponendo l'ultimo termine (o attraverso la risoluzione di un'equazione di 2° grado o trattarlo come trinomio di 2° grado), la disequazione di partenza diventa:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3) > 0$$

Risolviamola:



Soluzione: $x < -1 \ \cup \ 1 < x < 2 \ \cup \ x > 3$

Risolvere la seguente disequazione: $x^3-2x^2-x+2<0$

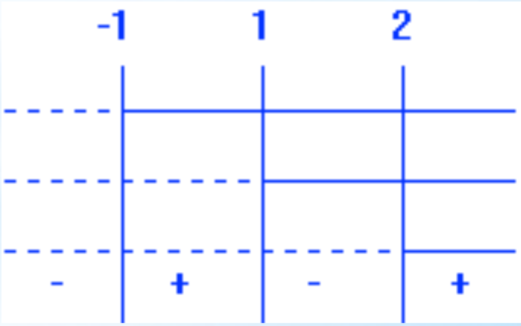
1. Scompongo il polinomio in fattori (utilizzare la regola di Ruffini o altre modalità di scomposizione):

$$(x - 2)(x - 1)(x + 1) < 0$$

2. Studio il segno dei fattori ponendoli maggiore di zero:

$$\begin{array}{ll} x - 2 > 0 & \text{per } x > 2 \\ x - 1 > 0 & \text{per } x > 1 \\ x + 1 > 0 & \text{per } x > -1 \end{array}$$

3. Rappresento in un unico grafico il segno di tutti i fattori:



4. La soluzione della disequazione è data dagli intervalli in cui il prodotto è negativo:

$x < -1$ e $1 < x < 2$

Risolvere la seguente *disequazione binomia*: $x^3+8\leq 0$

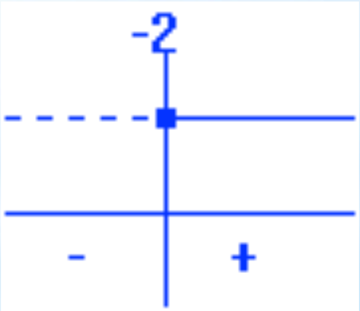
1. Scompongo il polinomio in fattori (somma di due cubi):

$$(x+2)(x^2-2x+4)\leq 0$$

2. Studio il segno dei fattori ponendoli maggiore di zero:

$$x+2\geq 0 \quad \text{per } x\geq -2$$
$$x^2-2x+4\geq 0 \quad \text{sempre positivo}$$

3. Rappresento in un unico grafico il segno di tutti i fattori:



4. La soluzione della disequazione è data dagli intervalli in cui il prodotto è negativo:

$x\leq -2$

Risolvere la seguente *disequazione biquadratica*: $x^4-5x^2+4<0$

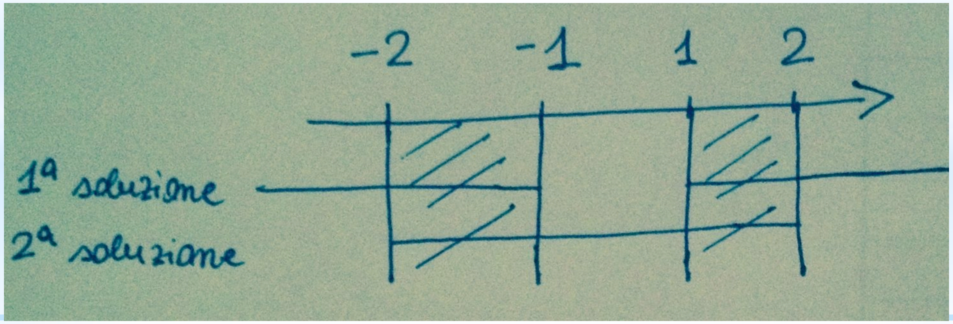
1. Pongo $x^2 = y$ e risolvo la disequazione equivalente:

$$y^2 - 5y + 4 < 0 \qquad \text{soluzione: } 1 < y < 4$$

2. Quindi:

$$1 < y < 4 \rightarrow 1 < x^2 < 4 \rightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 < 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -1 \cup x > 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

3. La soluzione della disequazione è data dagli intervalli in cui è soddisfatto il sistema (linee continue che si sovrappongono: parte tratteggiata):



$$-2 < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < 2$$

Risolvere la seguente *disequazione trinomia*: $x^6-3x^3+2>0$

Risolviamo la disequazione equivalente:

$$x^6-3x^3+2>0 \xrightarrow{z=x^3} z^2-3z+2>0 \rightarrow z<1 \cup z>2$$

Quindi:

$$z<1 \cup z>2 \rightarrow x^3<1 \cup x^3>2 \rightarrow x<1 \cup x>2$$